Lösung: Serie 4

1. Zusammenhängende offene Mengen im euklidischen Raum

Dass zusammenhängend aus wegzusammenhängend folgt, ist bekannt. Sei also $A \subset \mathbb{R}^d$ offen und zusammenhängend. Wähle ein $a \in A$ und definiere

$$B := \{x \in A : \exists \text{ ein Weg in } A \text{ von } a \text{ nach } x\ \}.$$

Wir wollen zeigen, dass $B = A$. Da A zusammenhängend und $a \in B \neq \emptyset$ ist, reicht es zu zeigen, dass B sowohl offen als auch abgeschlossen ist (in A).
Zuerst zeigen wir, dass B offen ist. Sei $x \in B$. Dann ist $x \in A$ und somit gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(x) \subset A$. $B_\varepsilon(x)$ ist jedoch wegzusammenhängend und somit gibt es für jedes $y \in B_\varepsilon(x)$ einen Weg γ_1 von y nach x. Da $x \in B$, gibt es einen Weg γ_2 von x nach a und folglich ist $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ ein Weg von y nach a. Damit ist $B_\varepsilon(x) \subset B$.
Es bleibt zu zeigen, dass B abgeschlossen ist. Dies ist äquivalent zu $A \setminus B$ offen. Sei $x \in A \setminus B$. Dann ist $x \in A$ und somit gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset A$. Sei $y \in B_\varepsilon(x)$. Da $B_\varepsilon(x)$ zusammenhängend ist gibt es einen Weg γ_1 von x nach y. Falls es einen Weg γ_2 von y nach a gäbe, so wäre $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ ein Weg von x nach a, was jedoch $x \in A \setminus B$ widerspricht. Somit kann es keinen Weg von y nach a geben, womit $B_\varepsilon(x) \subset A \setminus B$ gezeigt ist.

2. Homotopie und Verknüpfung von Wegen

Erinnerung:

- Wenn $\gamma, \gamma' \in C([0,1], E)$ mit $\gamma(0) = \gamma'(0) =: a$ und $\gamma(1) = \gamma'(1) =: b$, dann

  $$\gamma \sim \gamma' :\Leftrightarrow \exists H \in C([0,1]\times[0,1], E) \text{ mit } \begin{cases} H(0,\cdot) = \gamma, H(1,\cdot) = \gamma', \\ H(s,0) = a, H(s,1) = b, \text{für } s \in [0,1]. \end{cases}$$

  So ein H nennen wir *Homotopie* oder *Weghomotopie* von γ nach γ'. (Beachte dass unsere Definition beinhaltet dass die Endpunkte fix bleiben.)

- Für Wege $\gamma_0, \gamma_1 \in C([0,1], E)$ mit $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$ ist der Weg $\gamma_0 \cdot \gamma_1 \in C([0,1], E)$ durch

  $$\gamma_0 \cdot \gamma_1(t) := \begin{cases} \gamma_0(2t) & \text{falls } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_1(2t-1) & \text{falls } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

  definiert.

Da $\gamma_i \sim \gamma_i{}'$ existiert eine Homotopie H_i von γ_i nach $\gamma_i{}'$, $i = 1, 2$. Definiere $H : [0,1] \times [0,1] \to E$ durch

$$H(s,t) := \begin{cases} H_0(s, 2t) & \text{falls } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_1(s, 2t-1) & \text{falls } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

für $s, t \in [0,1]$. H ist stetig weil $H_0(\cdot, 1) \equiv y \equiv H_1(\cdot, 0)$. Weiter gilt dass $H(s,0) = H_0(s,0) = x$ und $H(s,1) = H_1(s,1) = z$ für alle $s \in [0,1]$, und nach Definition des "Produkt" $\cdot$ von Wegen haben wir $H(0,\cdot) = \gamma_0 \cdot \gamma_1$ und $H(1,\cdot) = \gamma_0' \cdot \gamma_1'$. Also ist H eine Homotopie von $\gamma_0 \cdot \gamma_1$ nach $\gamma_0{}' \cdot \gamma_1{}'$, das heisst $\gamma_0 \cdot \gamma_1 \sim \gamma_0{}' \cdot \gamma_1{}'$.

3. Fundamentalgruppe des Kreises

Wir bemerken zuerst dass für jedes $n \in \mathbb{Z}$ stetige *Winkelfunktionen* $S^1 \setminus \{-1\} \to (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ respektive $S^1 \setminus \{+1\} \to (n, n+1)$ existieren, diese sind Inverse von $\pi|(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ respektive $\pi|(n, n+1)$. Für jedes $z \in S^1$ und jedes $r \in \pi^{-1}\{z\}$ existiert also eine offene Umgebung U von z in S^1, $U = S^1 \setminus \{-1\}$ oder $U = S^1 \setminus \{1\}$, und eine stetige Winkelfunktion $\sigma : U \to \mathbb{R}$ so dass $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$ und $\sigma(z) = r$.
(a) Sei $\gamma \in E$, d.h. $\gamma \in C([0,1], \mathbb{R})$ mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) \in \mathbb{Z}$. Betrachte $\gamma' := \pi \circ \gamma$. Offensichtlich gilt dass $\gamma' \in C([0,1], S^1)$ mit $\gamma'(0) = 1$ und $\gamma'(1) = 1$. Daher ist p wohldefiniert.
Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in E$ mit $p(\gamma_1) = p(\gamma_2)$. Wir wollen zeigen dass $\gamma_1 = \gamma_2$, oder äquivalent dass

$$A := \{t \in [0,1] : \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\} = [0,1].$$

Beachte dass $0 \in A$. Dazu genügt es zu zeigen dass A sowohl offen als auch abgeschlossen in $[0,1]$ (und nichtleer) ist, denn $[0,1]$ ist zusammenhÃngend. $A = (\gamma_1 - \gamma_2)^{-1}(\{0\})$ ist abgeschlossen weil γ_1, γ_2 stetig sind und $\{0\} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen ist. Sei $t \in A$. Wähle eine Umgebung $I \subset \mathbb{R}$ von $\gamma_1(t) = \gamma_2(t) \in \mathbb{R}$ so dass $\pi|I$ bijektiv ist. Weil $\pi \circ \gamma_1 = \pi \circ \gamma_2$ gilt also $\gamma_1 = \gamma_2$ auf $V := \gamma_1^{-1}(I) \cap \gamma_2^{-1}(I)$; V ist relativ offen in $[0,1]$ und enthält t. Somit ist A offen in $[0,1]$.
Eine Inspektion des Beweises in (a) zeigt dass wir folgendes bewiesen haben:

Lemma *A*. *Sei Q ein zusammenhängender topologischer Raum und $\phi : Q \to S^1$ sei stetig. Wenn $\widetilde{\phi}_1, \widetilde{\phi}_2 : Q \to \mathbb{R}$ stetige Abbildungen sind mit $\pi \circ \widetilde{\phi}_i = \phi$ $(i = 1,2)$ und $\widetilde{\phi}_1(q_0) = \widetilde{\phi}_2(q_0)$ an einem Punkt $q_0 \in Q$, dann gilt $\widetilde{\phi}_1 = \widetilde{\phi}_2$.*

Als nächstes zeigen wir folgendes zentrale Resultat welches wir in (b) und (d) benötigen.

Lemma *B*. *Es sei Q ein lokal zusammenhängender Raum, zum Beispiel $Q = [0,1]$ oder $Q = \{*\}$ ein Punkt. Weiter sei $\phi_0 : Q \to S^1$ stetig, $H : [0,1] \times Q \to S^1$ stetig mit $H(0, \cdot) = \phi_0$, $\widetilde{\phi}_0 : Q \to \mathbb{R}$ stetig mit $\pi \circ \widetilde{\phi}_0 = \phi_0$. Dann existiert eine eindeutige stetige Abbildung $\widetilde{H} : [0,1] \times Q \to \mathbb{R}$ so dass $\pi \circ \widetilde{H} = H$ und $\widetilde{H}(0, \cdot) = \widetilde{\phi}_0$. Wenn für ein $q \in Q$ die Abbildung $s \mapsto H(s,q)$ konstant ist, so ist auch $s \mapsto \widetilde{H}(s,q)$ konstant.*

Im Beweis dieses Lemma werden wir folgende Resulate benutzen welche von unabhängigen Interesse sind.

Lemma *C* *Sei Q ein lokal zusammenhängender Raum, $q_0 \in Q$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(S^n)$ eine endliche offene Überdeckung von S^n, und $H : [0,1] \times Q \to S^n$ stetig. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ und eine zusammenhängende offene Umgebung $W \subset Q$ von q_0 so dass*

$$\forall j \in \{1, \dots, N\}\ \exists U_j \in \mathcal{U} : \quad H\left(\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right] \times W\right) \subset U_j. \tag{1}$$

Der Beweis von Lemma C benutzt:

Lemma ***(Spezialfall des Lebesgue Zahl Lemma)***. *Wenn $\mathcal{A}$ eine offene Überdeckung eines kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist, dann*

$$\exists \delta > 0 : \quad [(I' \subset I \textit{ ein Intervall } \wedge |I'| < \delta) \Rightarrow (\exists J \in \mathcal{A} : I' \subset J)] .$$

Solch eine Zahl δ heisst Lebesgue Zahl für die offene Überdeckung $\mathcal{A}$.

Den einfachen Beweis des Lebesgue Zahl Lemma verschieben wir in Serie 7.

Beweis von Lemma C. Für jedes $s \in [0,1]$ existiert eine offene Umgebung $U \in \mathcal{U}$ des Punktes $H(s,q_0) \in S^1$. Weil $H^{-1}(U)$ eine offene Umgebung von (s,q_0) ist existieren nach Definition der Produkttopologie relativ offene Teilmengen $J \subset [0,1]$ und $V \subset Q$ so dass $(s,q_0) \in J \times V \subset H^{-1}(U)$; wir können J als Intervall wählen. Die Kollektion aller solchen Produktmengen $J \times V$ (bezüglich aller $s \in [0,1]$) bildet eine offene Überdeckung der kompakten Menge $[0,1] \times \{q_0\}$, so dass endlich viele von ihnen, sagen wir $J_1 \times V_1, \dots, J_m \times V_m$, die Menge $[0,1] \times \{q_0\}$ überdecken. Weil Q lokal zusammenhängend ist existiert eine Umgebung W von q_0 mit $W \subset V_1 \cap \dots \cap V_m$. Weiter sei $\delta > 0$ eine Lebesgue Zahl für die relativ offene Überdeckung $\{J_1, \dots, J_m\}$ von $[0,1]$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so dass $N^{-1} < \delta$. Die Behauptung folgt nun durch Anwendung des Lebesgue Zahl Lemma. □(Lemma C)

Im Beweis von Lemma B werden wir Folgendes benutzen:

Lemma ***(Klebe-Lemma)***. *Es seien $(E, \mathcal{T})$, $(E', \mathcal{T}')$ topologische Räume.* Notation*: Für $Y \subset E$ schreiben wir $f \in C(Y, E')$ wenn $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (E', \mathcal{T}')$ stetig ist. Angenommen $E = A \cup B$ ist die Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen A, B von $(E, \mathcal{T})$. Wenn $f \in C(A, E')$ und $g \in C(B, E')$, und wenn $f = g$ auf $A \cap B$, dann ist $h : E \to E'$, definiert durch $h|A = f$ und $h|B = g$, stetig.*

(Den einfachen Beweis des Klebe-Lemma werden wir in Serie 6 nachholen.)

Beweis von Lemma B. Wir zeigen zuerst lokale *Eindeutigkeit* von $\widetilde{H}$. Angenommen $W \subset Q$ und $\widetilde{H}_i : [0,1] \times W \to \mathbb{R}$ sind stetige Abbildungen mit $\pi \circ \widetilde{H}_i = H$ $(i = 1,2)$, welche auf $\{0\} \times W$ übereinstimmen. Für jedes $q \in W$ sind dann $t \mapsto \widetilde{H}_i(t,q)$ $(i = 1,2)$ Wege mit gleichem Startpunkt, also stimmen sie nach Lemma A überein. Es folgt dass $\widetilde{H}_1$ und $\widetilde{H}_2$ auf $[0,1] \times W$ übereinstimmen. Insbesondere, wenn wir $W = B$ nehmen, so beweist dies die Eindeutigkeitsaussage im Lemma.
Wir zeigen nun *Existenz* von $\widetilde{H}$. Für gegebenes $q_0 \in Q$ wenden wir Lemma C mit $n = 1$ und $\mathcal{U} = \{S^1 \setminus \{-1\}, S^1 \setminus \{1\}\}$ an. Dies gibt uns ein $N \in \mathbb{N}$ und eine zusammenhängende offene Umgebung $W \subset Q$ von q_0 so dass (1) gilt. Insbesondere existiert $U_1 \in \mathcal{U}$ so dass $H\left(\left[0, \frac{1}{N}\right] \times W\right) \subset U_1$. Weiter gibt es eine stetige Winkelfunktion $\sigma_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ so dass $\sigma_1(\phi_0(q_0)) = \widetilde{\phi}_0(q_0)$. Wir definieren $\widetilde{H}$ auf $[0, \frac{1}{N}] \times W$ als

$$\widetilde{H}|_{[0,1/N] \times W} := \sigma_1 \circ H|_{[0,1/N] \times W} .$$

Als Komposition von stetigen Abbildungen ist diese Abbildung stetig. Die Abbildung $\widetilde{H}(0,\cdot)|_W = \sigma \circ \phi_0|_W : W \to \mathbb{R}$ nimmt an der Stelle q_0 den Wert $\widetilde{\phi}_0(q_0)$ an – nach Konstruktion von σ_1 – und erfüllt

$$\pi \circ \widetilde{H}(0,\cdot)|_W = \phi_0|_W = \pi \circ \widetilde{\phi}_0|_W.$$

Mit Lemma A folgt dass $\widetilde{H}(0,\cdot)|_W = \widetilde{\phi}_0|_W$.
Wir setzen nun $\widetilde{H}|_{[0,1/N]\times W}$ per Induktion zu einer stetige Abbildung $\widetilde{H} : [0,1]\times W \to \mathbb{R}$ mit $\pi \circ \widetilde{H} = H|_{[0,1]\times W}$ und $\widetilde{H}(0,\cdot) = \widetilde{\phi}_0|_W$ fort. Dazu nehmen wir induktionsweise für ein $j \in \{1,\ldots,N\}$ an dass wir eine stetige Abbildung $\widetilde{H}_{\text{alt}} : [0, \frac{j-1}{N}] \times W \to \mathbb{R}$ haben mit

$$\pi \circ \widetilde{H}_{\text{alt}} = H|_{[0,\frac{j-1}{N}]\times W} \quad \text{und} \quad \widetilde{H}_{\text{alt}}(0,\cdot) = \widetilde{\phi}_0|_W. \tag{2}$$

Gemäss Lemma C existiert $U_j \in \mathcal{U}$ so dass $H\left([\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}] \times W\right) \subset U_j$. Weiter gibt es eine stetige Winkelfunktion $\sigma_j : U_j \to \mathbb{R}$ so dass

$$\sigma_j\left(H(\frac{j-1}{N}, q_0)\right) = \widetilde{H}_{\text{alt}}\left(\frac{j-1}{N}, q_0\right). \tag{3}$$

Definiere $\widetilde{H}_{\text{neu}} : [0, \frac{j}{N}] \times W \to \mathbb{R}$ als

$$\widetilde{H}_{\text{neu}} := \begin{cases} \widetilde{H}_{\text{alt}} & \text{auf } [0, \frac{j-1}{N}] \times W, \\ \sigma_j \circ H|_{[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}]\times W} & \text{auf } [\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}] \times W. \end{cases}$$

Wir müssen zeigen dass $\widetilde{H}_{\text{neu}}$ auf der zusammenhängenden Menge $\{\frac{j-1}{N}\} \times W$ wohldefiniert ist. Aus (3) und

$$\pi \circ \left[\sigma_j \circ H(\frac{j-1}{N},\cdot)|_W\right] = H(\frac{j-1}{N},\cdot)|_W \overset{(2)}{=} \pi \circ \widetilde{H}_{\text{alt}}(\frac{j-1}{N},\cdot)$$

folgt mit Lemma A tatsächlich dass

$$\widetilde{H}_{\text{alt}}\left(\frac{j-1}{N},\cdot\right) = \sigma_j \circ H\left(\frac{j-1}{N},\cdot\right)|_W.$$

Damit ist $\widetilde{H}_{\text{neu}}$ wohldefiniert und nach dem Klebe-Lemma auch stetig. Wegen (2) haben wir

$$\pi \circ \widetilde{H}_{\text{neu}} = H|_{[0,\frac{j}{N}]\times W} \quad \text{und} \quad \widetilde{H}_{\text{neu}}(0,\cdot) = \widetilde{\phi}_0|_W.$$

Dies beendet den Induktionsschritt.
Jeder Punkt von Q ist in einer Umgebung W enthalten so dass eine stetige Abbildung $\widetilde{H}_W : [0,1]\times W \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\pi \circ \widetilde{H}_W = H|_{[0,1]\times W} \quad \text{und} \quad \widetilde{H}_W(0,\cdot) = \widetilde{\phi}_0|_W.$$

Wenn W und W' zwei solche Umgebungen sind, dann stimmen $\widetilde{H}_W$ und $\widetilde{H}_{W'}$, gemäss der oben bewiesenen lokalen Eindeutigkeit von $\widetilde{H}$, auf $[0,1]\times(W\cap W')$

überein. Dies erlaubt uns $\widetilde{H}$ global auf $[0,1] \times Q$ zu definieren. $\widetilde{H}$ ist stetig weil die Einschränkung auf jede solche Umgebung W, wie oben, stetig ist. Nach Konstruktion gilt

$$\pi \circ \widetilde{H} = H \quad \text{und} \quad \widetilde{H}(0, \cdot) = \widetilde{\phi}_0.$$

Wenn nun für ein $q \in Q$ der Weg $[0,1] \to S^1$, $s \mapsto H(s,q)$, konstant, also gleich $H(0,q) = \phi_0(q)$ ist, dann folgt mit Lemma A dass der Weg $[0,1] \to \mathbb{R}$, $s \mapsto \widetilde{H}(s,q)$, konstant gleich $\widetilde{\phi}_0(q)$ ist, denn $\widetilde{H}(0,q) = \widetilde{\phi}_0(q)$ und

$$\pi \circ \widetilde{H}(\cdot, q) = H(\cdot, q) \equiv \phi_0(q) = \pi \circ \widetilde{\phi}_0(q). \qquad \Box(\text{Lemma B})$$

(b) Wir verifizieren dass p surjektiv ist. Sei $\gamma \in B$. Wir wollen $\widetilde{\gamma} \in E$ finden so dass $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$. Dazu wenden wir das obige *Lemma B* an, und zwar mit $Q = \{*\}$, $\phi_0(*) := \gamma(0) = 1$ und $\widetilde{\phi}_0(*) := 0$. Damit existiert eine eindeutige stetige Abbildung $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}$ so dass $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ und $\widetilde{\gamma}(0) = 0$ (in der Notation des Lemma, $\widetilde{\gamma} = \widetilde{H}(\cdot, *)$). Wir haben $\pi \circ \widetilde{\gamma}(1) = \gamma(1) = 1$, also $\widetilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$ und somit $\widetilde{\gamma} \in E$.

(c) Gegeben $\gamma_0, \gamma_1 \in B$, angenommen $p^{-1}(\gamma_0), p^{-1}(\gamma_1) \in E$ haben den gleichen Endpunkt in $\mathbb{Z}$, $p^{-1}(\gamma_0)(1) = p^{-1}(\gamma_1)(1)$. Dann definiert

$$H(s,t) := (1-s)p^{-1}(\gamma_0)(t) + sp^{-1}(\gamma_1)(t) \qquad (s,t \in [0,1])$$

eine Homotopie von $p^{-1}(\gamma_0)$ nach $p^{-1}(\gamma_1)$. Somit ist $p \circ H$ eine Homotopie von γ_0 nach γ_1, das heisst $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

(d) Wir zeigen die Kontraposition. Es seien $\gamma_0, \gamma_1 \in B$ mit $\gamma_0 \sim \gamma_1$. Dann existiert $H : [0,1] \times [0,1] \to S^1$ mit $H(0,\cdot) = \gamma_0$, $H(1,\cdot) = \gamma_1$ und $H(s,0) = H(s,1) = 1$ für $s \in [0,1]$. Wir wenden das obige *Lemma B* an, und zwar mit $Q = [0,1]$, $\phi_0 := \gamma_0$ und $\widetilde{\phi}_0 := p^{-1}(\gamma_0)$. Es existiert also $\widetilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\pi \circ \widetilde{H} = H$ und $\widetilde{H}(0,\cdot) = p^{-1}(\gamma_0)$ so, dass $s \mapsto \widetilde{H}(s,q)$ konstant ist für $q = 0, 1$. In anderen Worten ist $\widetilde{H}$ eine Weghomotopie von $p^{-1}(\gamma_0)$ nach $\widetilde{H}(1,\cdot) =: \widetilde{\gamma}_1$. Wir haben

$$\pi \circ \widetilde{\gamma}_1 = \pi \circ \widetilde{H}(1,\cdot) = H(1,\cdot) = \gamma_1$$
$$\widetilde{\gamma}_1(q) = \widetilde{H}(1,q) = \widetilde{H}(0,q) = p^{-1}(\gamma_0)(q) \quad \text{für } q = 0, 1.$$

Insbesondere ist $\widetilde{\gamma}_1 \in E$, also muss $\widetilde{\gamma}_1 = p^{-1}(\gamma_1)$ sein, und es gilt

$$p^{-1}(\gamma_1)(1) = \widetilde{\gamma}_1(1) = p^{-1}(\gamma_0)(1).$$

(e) Aus den Teilaufgaben (a) und (b) folgt, dass die Schlaufen in B eins zu eins mit Wegen in E identifiziert werden können. Somit entsprechen die Homotopieklassen gemäss Teilaufgaben (c) und (d) genau den verschiedenen Endpunkten der Wege in E und somit $\mathbb{Z}$. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Verknüpfung von Wegen der Addition in $\mathbb{Z}$ entspricht. Dies ist jedoch leicht zu sehen. Das einzige was dabei beachtet werden muss, ist, dass wenn man zwei Wege γ_0 und γ_1 aus B miteinander verknüpft, so erhält man in E den Weg $p^{-1}(\gamma_0) \cdot \big(p^{-1}(\gamma_1) + p^{-1}(\gamma_0)(1)\big)$, d.h. man muss den Anfangspunkt des zweiten Weges in $\mathbb{R}$ an den Endpunkt des ersten Weges verschieben.

4. Fundamentalgruppe höher-dimensionaler Sphären

(In dieser Lösung folgen wir einer leicht vereinfachten Strategie.) Es sei $\gamma \in C([0,1], S^n)$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ und $n \geq 2$. Wir wollen zeigen dass γ zum konstanten Weg e_{x_0} homotop ist. Dazu wähle $y_0 \in S^n \setminus \{x_0\}$. Wir zeigen:

i) $S^n \setminus \mathrm{pt}$ (das soll heissen "n-Sphäre minus ein Punkt") ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$. Insbesondere gilt $\pi_1(S^n \setminus \{y_0\}, x_0) = \{e_{x_0}\}$.

ii) Wegen $n \geq 2$ existiert ein Weg $\gamma' \in C([0,1], S^n)$ mit $\gamma'(0) = \gamma'(1) = x_0$ so dass $\gamma \sim \gamma'$ und $y_0 \notin \mathrm{Bild}(\gamma')$.

Weil nach (i) $\pi_1(S^n \setminus \{y_0\}, x_0) = \{e_{x_0}\}$, muss der Weg γ' aus (ii) homotop zu e_{x_0} sein. Also gilt $\gamma \sim e_{x_0}$.

(i) Es bezeichne $N := (0, \ldots, 0, 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ den "Nordpol" in S^n. Definiere die *stereographische Projektion*

$$\sigma : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n, \ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \frac{(x_1, \ldots, x_n)}{1 - x_{n+1}}.$$

Diese Abbildung ist bijektiv mit Inversem

$$\sigma^{-1} : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{N\}, \ (u_1, \ldots, u_n) \mapsto \frac{(2u_1, \ldots, 2u_n, |u|^2 - 1)}{|u|^2 + 1}.$$

σ und σ^{-1} sind beides stetige Abbildungen, also ist $S^n \setminus \{N\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$. Wir haben

$$\pi_1(S^n \setminus \{N\}) \sim \pi_1(\mathbb{R}^n) = \{e\}.$$

(ii) In Lemma C, siehe Lösung von Aufgabe 3, haben wir insbesondere folgendes gezeigt: Wenn $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(S^n)$ eine endliche offene Überdeckung von S^n ist und $\gamma \in C([0,1], S^n)$, dann existiert $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\forall j \in \{1, \ldots, N\} \ \exists U_j \in \mathcal{U} : \quad \gamma\left(\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right]\right) \subset U_j. \tag{1}$$

Setze

$$U := \{x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} : |x - q| < \varepsilon\}$$

für ein $\varepsilon \in (0,1)$. Dann ist $U \approx (-\varepsilon, \varepsilon)^n$, also $\pi_1(U) = \{e\}$. Angenommen $[a,b] \subset [0,1]$ ist ein Intervall mit den Eigenschaften dass $\gamma([a,b]) \subset U$ und $\gamma(a) \neq y_0 \neq \gamma(b)$. Weil $U \setminus \{y_0\} \approx \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend ist – hier benutzen wir dass $n \geq 2$ – existiert also ein Weg in $U_{q_0} \setminus \{y_0\}$ der $\gamma(a)$ mit $\gamma(b)$ verbindet. Dieser Weg muss in U homotop zu $\gamma|_{[a,b]}$ sein, denn $\pi_1(U) = \{e\}$. Wegen (1), angewandt auf die offene Überdeckung $\mathcal{U} := \{U, S^n \setminus \{y_0\}\}$, lässt sich also ein Weg $\gamma' \in C([0,1], S^n)$ finden der homotop zu γ ist und dessen Spur $\mathrm{Bild}(\gamma')$ in $S^n \setminus \{y_0\}$ liegt.